Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
1C150 - ore 9:30 — 8 settembre 2014
Durata: 3 ore

Attenzione: Riconsegnerete TRE fogli (protocollo bianco, a 4 facciate), scriverete chiaramente cognome e nome, data e NUMERO (1,2, e 3) ben in vista, su ciascuno. Non riconsegnate questo foglio nè brutte copie. Potrete uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1

1.1 Tracciare schematicamente il ritratto in fase, specificando il tipo di equilibri, e il diagramma di biforcazione degli equilibri della seguente equazione dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$:

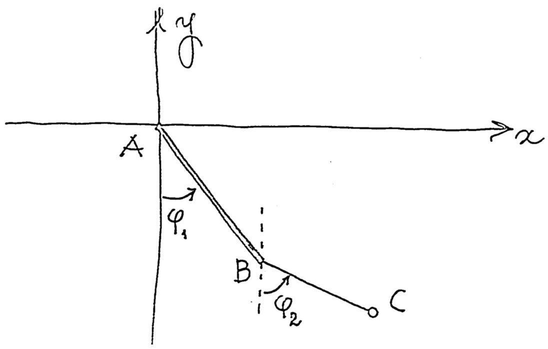
$$\dot{z} = (1-z)(z^2-k), \qquad z \in \mathbb{R}$$

1.2 Dare la definizione di stabilità, instabilità e stabilità asintotica.

2

2.1 Un'asta rigida AB di massa $6m$ e lunghezza ℓ è vincolata a ruotare nel piano xy attorno ad un asse fisso orizzontale, ad essa ortogonale, passante per il suo estremo A. All'estremo B è vincolata una seconda asta BC di massa trascurabile e lunghezza $\frac{3}{4}\ell$, e nell'estremo C è vincolato un punto materiale di massa m. Sul sistema agisce la gravità (l'asse y è verticale ascendente). Utilizzando le coordinate Lagrangiane φ_1, φ_2 indicate in figura

a. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne studi la stabilità.
b. Si determinino le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno ad una opportuna posizione di equilibrio.



2.2 Sia dato un sistema meccanico a vincoli olonomi fissi e lisci e sia conservativo: $L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - \mathcal{U}(q)$, $q \in Q$: varietà vincolare. È possibile, per qualche scelta di $\mathcal{U}(q)$, che esistano punti d'equilibrio q^* che siano *asintoticamente* stabili? In ogni caso, affermativo o negativo, giustificare in dettaglio la risposta.

3

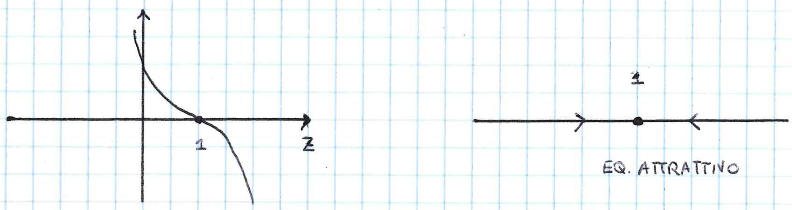
3.1 Si consideri il sistema del punto **2.2**. Si introduca per esso, se è possibile, la trasformazione di *Legendre*. In dettaglio, fino alla coniugazione di due sistemi di equazioni differenziali.

3.2 I sistemi Hamiltoniani 1-dimensionali $H(q,p), q \in \mathbb{R}^1$, sono *integrabili*? In altri termini, funziona per essi il *metodo di integrazione di Hamilton-Jacobi*? Spiegare senza far conti.

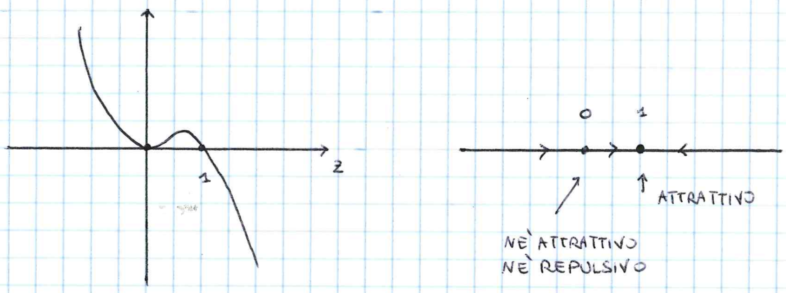
ESERCIZIO 1.1

Il grafico del polinomio $X_K(z) = (1-z)(z^2-K)$ e il ritratto in fase sono come in figura.

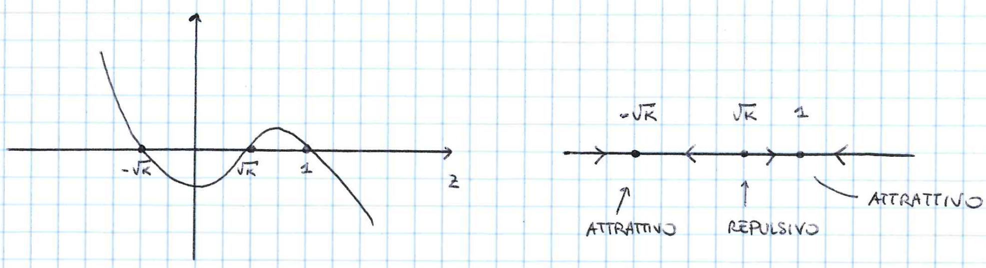
$\boxed{K<0}$



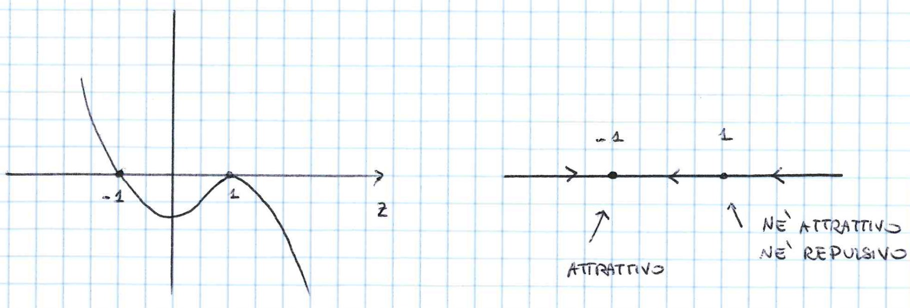
$\boxed{K=0}$



$\boxed{0<K<1}$ 3 equilibri, $-\sqrt{K}$, $+\sqrt{K}$, 1

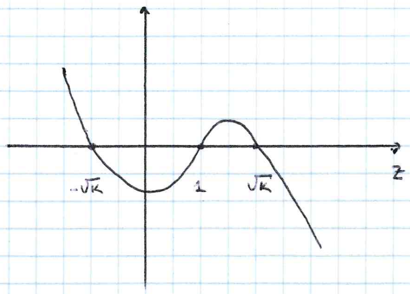


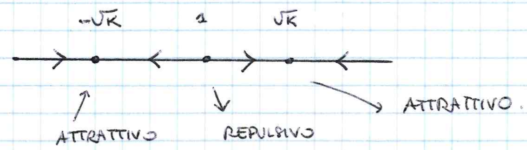
$\boxed{K=1}$ 2 equilibri, ± 1



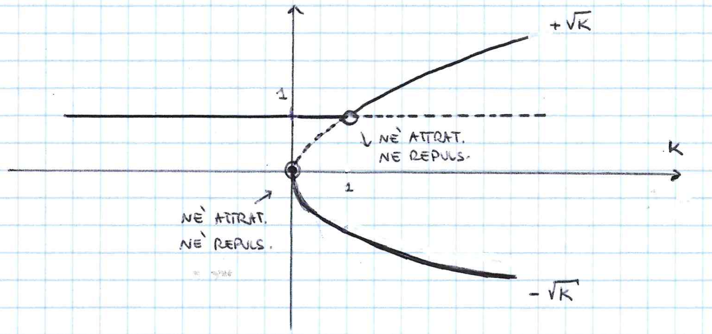
$\boxed{K>1}$ 3 equilibri, $-\sqrt{K}$, 1, $+\sqrt{K}$

pag. seguente ...





Il diagramma di biforcazione degli equilibri è conseguentemente :



—— = EQ. ATTRATTIVO

- - - - - = EQ. REPULSIVO

2.1

$$T(\varphi_1,\varphi_2,\dot\varphi_1,\dot\varphi_2) = \underbrace{m\ell^2\dot\varphi_1^2}_{E.C.\,dell'asta\,AB} + \frac{1}{2}m\ell^2 \underbrace{\left(\dot\varphi_1^2 + \frac{9}{16}\dot\varphi_2^2 + \frac{3}{2}\cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot\varphi_1\dot\varphi_2\right)}_{v_C^2}$$

$$T = \frac{1}{2}m\ell^2 \begin{pmatrix}\dot\varphi_1\\ \dot\varphi_2\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{4}\cos(\varphi_1-\varphi_2)\\ \frac{3}{4}\cos(\varphi_1-\varphi_2) & \frac{9}{16}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\dot\varphi_1\\ \dot\varphi_2\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U}(\varphi_1,\varphi_2) = -4mg\ell\cos\varphi_1 - \frac{3}{4}mg\ell\cos\varphi_2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\varphi_1} &= 4mg\ell\sin\varphi_1 \\ \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\varphi 2} &= \frac{3}{4}mg\ell\sin\varphi_2 \end{cases}$$

Equilibri: $(0,0), (0,\pi), (\pi,0), (\pi,\pi)$.

$$\nabla^2\mathcal{U}(\varphi_1,\varphi_2) = \begin{pmatrix} 4mg\ell\cos\varphi_1 & 0 \\ \\ 0 & \frac{3}{4}mg\ell\cos\varphi_2 \end{pmatrix}$$

È stabile solo $(0,0)$ (THND).

$$0 = \det\left(\nabla^2\mathcal{U}(0,0) - \omega^2 a(0,0)\right)$$

dove

$$a(0,0) = m\ell^2 \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{4} \\ \\ \frac{3}{4} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}$$

$$\omega_\pm = \sqrt{\frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{3}}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

2.2 Non è possibile: se esistesse un p.to q^* as. stab. esisterebbe un intorno V di $(q^*, 0) \in \mathbb{R}^{2N}$ da cui partendo arriverei per $t \to +\infty$ in $(q^*, 0)$ e lungo ciascuna di queste traiettorie l'integrale primo di Jacobi, l'energia, $E = T + \mathcal{U}$, sarebbe costante ed identicamente uguale al valore in $(q^*, 0)$, cioè $E \equiv \mathcal{U}(q^*)$, e così in tutto V, assurdo.

3.1 Legendre: vedi dispensa.

3.2 È un caso particolare del caso generale 'separabile', oppure di tutte le variabili cicliche tranne una, bisogna in ogni caso chiedere che $\frac{\partial H}{\partial p}(q,p) \neq 0$.